Lange Nacht der Mathematik

18. - 19. November 2022
(09)1011 – 1. Runde

Liebe Teilnehmer an der **„Langen Nacht der Mathematik“**, ihr freut euch darauf, in dieser Nacht an Aufgaben zu knobeln und zu versuchen, mit logischem Denken, mit geometrischem Vorstellungsvermögen, mit schnellem und richtigem Rechnen und Pfiffigkeit einigen Problemen zu Leibe zu rücken. Dazu sind Ausdauer und Hartnäckigkeit vonnöten. **Es ist Ehrensache, dass ihr die Aufgaben löst und nicht die älteren Schüler, Erwachsenen oder Lehrer.**

Mit einem Taschenrechner kann kein Beweis geführt werden. Auch ein Programm alleine kann kein Beweis sein und ist nicht gern gesehen.

Bei Verständnisproblemen in der Aufgabenstellung diskutiert ihr untereinander, fragt einen Lehrer oder schaut in unserem Forum vorbei. Hier werden auch alle Tipps und bei Fehlern Korrekturen veröffentlicht. Solltet ihr denken, dass es in einer Aufgabe einen Fehler gibt, können **eure Lehrer** unsere Hotline anrufen.

Um in die nächste Runde zu kommen, müssen alle Aufgaben richtig gelöst und auf unserer Internetseite eingegeben werden. Alle Antworten sind, sofern es nicht explizit im Aufgabentext steht, **ohne Leerzeichen** einzugeben!

In den ersten beiden Runden gibt es zu jeder Aufgabe einen Antworttyp, der das Format der Lösung angibt. Alle Antworttypen setzen sich aus verschiedenen Basis-Antworttypen zusammen.
Als Basis-Antworttypen gibt es:

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen (einschließlich der Null),
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen,
$\mathbb{Q}$	gekürzte Brüche, z.B. 3/7, 13/1 oder 25/4,
$\mathbb{R}$	in Kombination mit pi; e; …, z.B. 2w(3;5) für 2 mal 3. Wurzel aus 5 oder 25 oder $4pi + 3$ oder $2pi + w(2;2)$ etc. Häufig akzeptieren wir hier mehrere Schreibweisen.
$\mathbb{R}(n)$	Dezimalbruch gerundet auf n Stellen (mathematisches Runden), z.B. 1,750,
$\{G\}$	Teilmenge von G. Ist $G = \mathbb{N}$ sind $\{3;7;8\}$ oder $\{\}$ oder „N“ Beispiele. Ist $G = \mathbb{R}$ und die gesuchte Menge nicht endlich, so suchen wir eine Liste von Intervallen (mit ±inf) als „unendlich“; z.B.: $(-\text{inf};-5];[3;4);(7;55];[42;\text{inf})$.
$\{G \times H \times \cdots\}$	Teilmenge von $G \times H \times \cdots$. Bei $\{\mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ z.B. $\{(1;4);(2;9)\}$ oder $\{\}$ oder „NxZ“.
Wort(n)	Zeichenfolge mit n Zeichen. Ist n nicht angegeben, so ist die Länge nicht bekannt,
Zeitangaben	sind im Format dd:hh:mm:ss je nach Genauigkeit gefordert,
Datumsangaben	sind im Format tt.mm.jjjj je nach Genauigkeit anzugeben.

Wir wünschen euch viel Spaß und viel Erfolg!

Das Mathenacht-Team

Aufgabe 1.1: Primzahlen

Gesucht sind alle Quadrupel (a, b, c, d) aus Primzahlen, die folgende Gleichung erfüllen:

$$0 = 42a - 39b + 91c - 273d$$

Lösungstyp: $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Aufgabe 1.2: Im Betrieb (2)

Ein Betrieb kaufte in unterschiedlicher Stückzahl drei verschiedene Einzelteile (A, B, C), die 52 €, 29 € bzw. 3 € kosteten. Es wurden insgesamt 100 Einzelteile gekauft und die Gesamtkosten betrugen 2500 €.
Wie viel Stück wurden von jedem Einzelteiltyp gekauft, wenn man weiß, dass von B am meisten gekauft wurden?
Gib die Anzahlen in der Reihenfolge für A, B und C an.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$

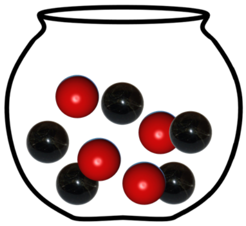
Aufgabe 1.3: Karo und Richard (0)

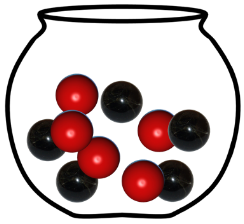
Karo und Richard sind bei einem Professor und dessen Ehefrau eingeladen und dürfen dort noch ein weiteres Ehepaar begrüßen. Weitere Gäste erscheinen an dem Tag nicht mehr. Zur Begrüßung trinkt jeder ein Glas Sekt. Dabei stoßen einige mit anderen Gästen an, so dass die jeweils zwei Gläser einen hellen Ton von sich geben. Keiner stößt mit seinem Partner an und mit jedem anderen höchstens einmal. Nun hat der Gastgeber nicht richtig aufgepasst. Als er seine Frau fragt, antwortet diese nur: „Wir anderen haben alle mit einer anderen Anzahl von Menschen angestoßen.“

Mit wie vielen Menschen hat die Gastgeberin angestoßen?
Mit wie vielen Menschen hat der Professor angestoßen?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$

Aufgabe 1.4: Gerechte Paare





Mats stellt eine Urne auf den Tisch. In der Urne sind 5 schwarze und 4 rote Kugeln. Es sollen nun völlig zufällig zwei Kugeln gezogen werden.

Mats meint: „Gisela darf ziehen und Heike gewinnt, wenn beide Kugeln dieselbe Farbe haben.“ Sofort protestiert Heike, weil sie das für ungerecht hält.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Gisela zwei gleichfarbige Kugeln zieht?

Mats: „Na gut, dann lege ich jetzt noch eine rote Kugeln in die Urne und ihr tauscht unter euch die Bedingungen.“ Sofort protestiert Gisela, weil sie das ungerecht findet.
Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass Gisela zwei verschieden-farbige Kugeln zieht?

Mats meint dazu: „Wenn euch das nicht passt, lege ich jetzt 28 rote Kugeln hinein und ihr sagt mir, wie viele schwarze Kugeln ihr euch in der Urne wünscht, damit ihr gleiche Chancen habt.“
Für wie viele schwarze Kugeln müssen sich die beiden entscheiden? Gebe alle Möglichkeiten an.

Lösungstyp: $\mathbb{Q}$;$\mathbb{Q}$;{$\mathbb{N}$}

Aufgabe 1.5: Multiple Choice (1)

Für jede Aufgabe gilt: **es können auch mehrere Antworten richtig sein.**

1. Die Zahl $5^{140} \cdot 8^{470}$ sei im Dezimalsystem vollständig ausgeschrieben.
   Dann ist die Anzahl der Ziffern

(a) ungerade	(b) 187	(c) 610	(d) 523

2. Welche Aussage über die Diagonalen eines Sechsecks sind wahr?
   (a) Ein Sechsecke hat weniger als 10 Diagonalen,
   (b) Die Diagonalen eines konvexen Sechsecks können einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen.
   (c) Ein Sechseck kann zwei sich nicht schneidende Diagonalen besitzen.
   (d) Ein reguläres Sechseck besitzt zwei Diagonalen, die parallel zueinander sind.

3. Die Seitenlängen eines Dreiecks seien $2a$, a^2+1 und a^2-1 mit $a>1$. Dann hat das Dreieck folgende Eigenschaften
   (a) Im Dreieck gibt es einen stumpfen Winkel.
   (b) Der größte Winkel ist ein rechter.
   (c) a^2+1 ist die Länge der größten Seite.
   (d) Die Länge der kürzesten Seite hängt von a ab.

4. Gegeben sei $f: R \mapsto R, f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 2$ und $f(3) = 5$.
   Welche der folgenden Aussagen können daraus geschlossen werden?

(a) f(0)=2	(b) f(-3)=-5	(c) f(-3)=-1	(d) f(3)+f(-3)=8

5. Zwei gleich lange Eisenbahnzüge fahren auf benachbarten Gleisen mit der Geschwindigkeit $u > 0$ und $v > 0$. Beide fahren in dieselbe Richtung und die Zeit, die sie benötigen, um aneinander vorbei zu fahren, ist doppelt so lang, wie wenn sie beide in zueinander entgegengesetzter Richtung fahren. Gesucht ist das Verhältnis $\frac{u}{v}$.

(a) 2	(b) $\frac{5}{2}$	(c) 3	(d) 4

Die Buchstaben der richtigen Antworten müssen innerhalb einer jeden Aufgabe alphabetisch sortiert sein und bzgl. der Aufgaben nacheinander eingegeben werden.

Lösungstyp: Wort

Aufgabe 1.6: Algebraische Techniken (3)

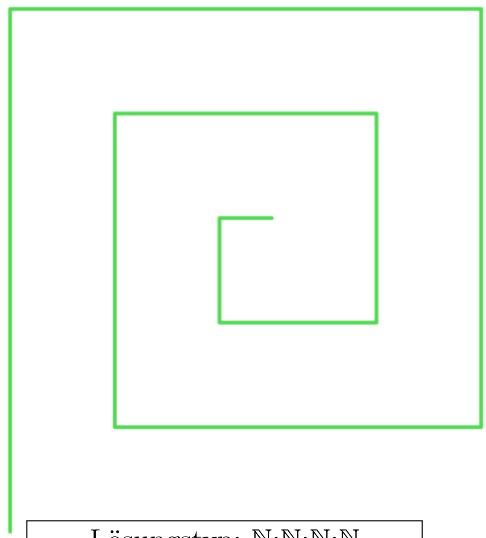
1. Gegeben ist
$$\frac{2000!}{1000!} = k \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots 1999)$$
   Gesucht ist der Wert für $k = a^b$.

2. Gesucht sind alle positiven ganzen Zahlen, die die folgende Gleichung erfüllen.
$$\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_6 x = \log_2 x \cdot \log_4 x + \log_2 x \cdot \log_6 x + \log_4 x \cdot \log_6 x.$$
   Einzugeben sind die Lösungen in der Reihenfolge von klein nach groß.

Lösungstyp: ℕˆℕ;{ℕ}

Aufgabe 1.7: Schneckengebilde

In der nebenstehenden Abbildung hat die kürzeste Strecke des Streckenzuges eine Länge von 3 Millimetern. Jede folgende Strecke ist um 3 Millimeter länger als die vorhergehende.



- Wie viele Strecken kann man mit einer Schnur von $16,5$ Metern legen?
- Wie hoch und wie breit würde die Figur werden?
- Wie viele vollständige Streckenzuganteile entstünden, wenn jede folgende Strecke sich nicht um 3 Millimeter verlängern würde, sondern auf das $1,2$-fache der vorherigen Strecke?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$

Liebe **Mathematikinteressierten!**

Jedes Jahr müssen 140 Aufgaben in der „Langen Nacht der Mathematik“ bereitgestellt werden. Das bedeutet aber, dass weitaus mehr Aufgaben entwickelt werden, weil es sich während der Entwicklung herausstellt, dass manche nicht geeignet ist. Außerdem müssen die Lösungshinweise auf Richtigkeit überprüft werden und zu guter Letzt müssen die eingesandten Lösungen am Wettbewerbs-Sonnabend korrigiert werden. Um das zu leisten, suchen wir Helfer (Lehrer, ältere Schüler, Studenten, AGs, ...)

- die sich bereit erklären, ab Anfang Februar (bei freier Zeiteinteilung), ein Teil der Aufgaben und **Lösungshinweise** zu überprüfen und Vorschläge zu machen, in welchen Jahrgängen die Aufgaben eingesetzt werden sollten,
- oder am Wettbewerbs-Sonnabend ab 9:00 die Lösungen der Teilnehmenden zu korrigieren.

Wir freuen uns auf Ihr Engagement.
Jochen Carow (joc.ca@t-online.de)

Aufgabe 1.8: Volumen und Oberfläche besitzen die gleiche Maßzahl

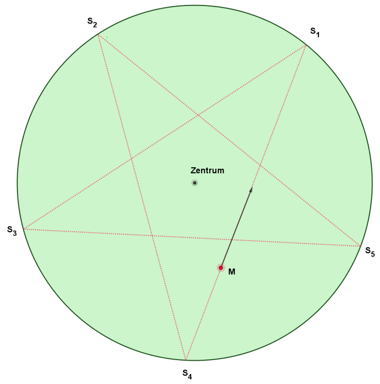
Unter bestimmten Voraussetzungen besitzen manche Körper sowohl für den Rauminhalt als auch für die Oberfläche die gleiche ganzzahlige Maßzahl (es sollen also die Maßeinheiten missachtet werden). Unter diesen sind jeweils die gesucht, wo die gesuchten Längen positive ganze Zahlen sind.

1. Wie groß ist für den geschilderten Fall die Kantenlänge eines solchen Würfels?
2. Wie groß ist für den geschilderten Fall der Radius einer solchen Kugel?
3. Gesucht ist für den geschilderten Fall der Radius gefolgt von der Höhe eines solchen senkrechten (geraden) Zylinders!
4. Wie groß ist für den geschilderten Fall der Radius gefolgt von der Höhe eines solchen senkrechten (geraden) (Kreis-)Kegels?

Lösungstyp:
$\{\mathbb{N}\}$;$\{\mathbb{N}\}$;$\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$;$\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Aufgabe 1.9: Billard (1)

Gegeben sei ein kreisrunder Billardtisch mit Radius 10 (LE) und eine „mathematische Billardkugel“ - Durchmesser Null, die deswegen auch keiner Reibung unterliegt. Die Billardkugel liegt genau auf einem Mittelpunkt M zwischen dem Zentrum Z des Billardtisches und einem Punkt P auf der Peripherie des Tisches. Nun soll die Billardkugel mit dem Queue so in Bewegung gesetzt werden, dass sie dauerhaft <u>ein</u> Pentagramm beschreibt.



Gesucht ist das größte Maß des Winkels von $\sphericalangle MZS_i$.
(Gemessen wird im positiven Drehsinn.)

Lösungstyp: $\mathbb{R}(3)$

Aufgabe 1.10: Beträge (1)

Gesucht ist die Lösungsmenge bzgl. $G = \mathbb{R}$

$$\left| \frac{2 \cdot x + 1}{3 \cdot x - 1} - \frac{7}{11} \right| < 0,01$$

Gesucht ist die Lösungsmenge.
(Gibt es einzelne Werte, sind sie von klein nach groß einzugeben. Im Falle eines Intervalls ist zuerst die linke Grenze anzugeben- siehe Blatt 1 des Wettbewerbs.)

Lösungstyp: $\{\mathbb{R}\}$